§ 动力学

一. 刚体的加速度

1. 线

$$ {}^{A}V_Q = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_Q + {}^{A}\Omega_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q $$ B中Q向量，A,B原点重合

$\Downarrow$

$$ \frac{d}{dt}\left(\cancel{V_Q}\;{}^{A}_{B}R\,Q_B\right) = \underbrace{{}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_Q}_{\text{内部的导数}} + \underbrace{{}^{A}\Omega_B \times {}^{A}_{B}R\cdot{}^{B}Q}_{\text{旋转带来的方向改变}} \quad (1) \qquad (*). $$

$$ \frac{d({}^{A}V_Q)}{dt} = \underbrace{\frac{d\,({}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_Q)}{dt}}_{①} + \underbrace{\frac{d\,({}^{A}\Omega_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q)}{dt}}_{②}. $$

① 项为 (1) 的进一步

② 项展开为: ${}^{A}\dot{\Omega}_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q + {}^{A}\Omega_B \times \frac{d({}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q)}{dt}$ → 代入(1)

$$ = {}^{A}\dot{\Omega}_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q + {}^{A}\Omega_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_Q + {}^{A}\Omega_B \times ({}^{A}\Omega_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q) $$

结合起来:

$$ {}^{A}\dot{V}_Q = \underbrace{{}^{A}_{B}R\,{}^{B}\dot{V}_Q}_{①} + \underbrace{2\,{}^{A}\Omega_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_Q}_{②} + \underbrace{{}^{A}\dot{\Omega}_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q}_{③} + \underbrace{{}^{A}\Omega_B \times ({}^{A}\Omega_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q)}_{④}. $$

①: 相对加速度: Q自己在B内部的加速度.

②: 科氏加速度: 坐标系在转, 点在旋转坐标系中运动, 比如小车在旋转盘上跑。方向看 × 乘.

③: 切向加速度: 旋转对点带来的切向加速度, 方向沿切向.

④: 向心加速度.

- 原点不重合再加上 ${}^{A}\dot{V}_{BORG}$.

若Q固定在B上, 则没有科氏, 相对. $\dot{V}_Q = V_Q = 0$.

$$ \Rightarrow {}^{A}\dot{V}_Q = {}^{A}\dot{V}_{BORG} + {}^{A}\dot{\Omega}_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q + {}^{A}\Omega_B \times ({}^{A}\Omega_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q). \quad (*). $$

2. 角加速度

$${}^{A}\Omega_C = {}^{A}\Omega_B + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\Omega_C$$

$${}^{A}\dot{\Omega}_C = {}^{A}\dot{\Omega}_B + \frac{d({}^{A}_{B}R\,{}^{B}\Omega_C)}{dt}$$ ⇒ 依然使用 ② 中的 ② .

$$= \underbrace{{}^{A}\dot{\Omega}_B}_{\text{本身的旋转}} + \underbrace{{}^{A}\Omega_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\Omega_C}_{\text{由于父系旋转导致的相对角速度方向变化}} + \underbrace{{}^{A}_{B}R\,{}^{B}\dot{\Omega}_C}_{C\text{自己相对}B\text{的旋转，转到}A\text{系中}}$$

⇒ Ω_C 被 B的旋转带着变了.

▲ 向量在旋转的坐标系中 ~~变化~~ 随时间变化，除了本身的相对变化
还要加上 $\Omega \times$ 向量，写成 ② 式的其形式.

二. 质量分布，转动惯量/惯性张量（~~Inertia~~ Moment of Inertia）

① $T = I\alpha$. $T\uparrow\ \alpha\uparrow$ I是物体对旋转的抗拒程度.

$${}^{A}I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}.$$

对角线上：I_{xx}，I_{yy}，I_{zz}. 绕某一轴旋转时的转动惯量，叫惯性矩

其它：不同轴之间的耦合项，⇒ 惯性积

表示物体的质量分布有没有相对于坐标轴"斜歪耦合"

⇒比如说，绕x轴旋转，有没有因为质量分布不均产生了绕其它轴的转动

$$\boxed{I_{xx} = \iiint (y^2+z^2)\,\rho\, dv}$$

$mr^2 \Rightarrow \rho dv \cdot (\sqrt{y^2+z^2})^2$.

可以看出 m↑，离x轴距离↑，对旋转的阻碍增大.

$I_{xy} = \iiint xy\rho\, dv$. 若~~对~~刚体对称，则惯性积等于0，

▲ 坐标轴可以任意选取，使 $I = \begin{bmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix}$ 的这组轴叫主轴。

② 平行轴定理

$${}^{A}I_{xx} = {}^{C}I_{xx} + m(y_c^2 + z_c^2)$$ 已知旧，求新。

$${}^{A}I_{xy} = {}^{C}I_{xy} - m x_c y_c.$$ $\Rightarrow I_{新轴} = I_{旧} + md^2$.

矩阵：$^{A}I = {}^{C}I + m(P_c^T P_c I_3 - P_c P_c^T)$

性质：①惯性矩一定正；

② 惯性张量的特征值为刚体的主惯性矩，特征矢量为主轴；

$\rightarrow$ 参考系变化，惯性矩的和不变。

三、牛顿方程和欧拉方程

• 运动分成平动和转动，

平动使用牛顿方程 $F = m\dot{v}$

转动使用欧拉方程 $N = {}^{C}I\dot{\omega} + \omega \times {}^{C}I\omega$.

欧拉方程 N：合力矩

$H = I\omega$ 角动量

$$N = \frac{dH(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) \Rightarrow \underbrace{I\dot{\omega}}_{①} + \underbrace{\omega \times I\omega}_{②}.$$

①：让刚体产生角加速度所需的力矩。

② 角动量方向随刚体转动而变化，角动量方向与角速度方向不一致带来的力矩。

比如说，手持一个钻头，钻头随 x轴方向转 $\omega_1 = \begin{bmatrix}\omega_1\\0\\0\end{bmatrix}$

随手转动 $\omega_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\\omega_2\end{bmatrix}$.

$\omega = \begin{bmatrix}\omega_1\\0\\\omega_2\end{bmatrix}$. 此时 $\omega\times(I\omega)\neq 0$ 这个力矩就是第二项的陀螺力矩.

四. 递推动力学方程

牛顿—欧拉法分为两步

- 向外迭代：基座 → 末端 $\begin{cases}\omega_i \\ \dot\omega_i \\ \dot v_i & \text{原点线速度} \\ \dot v_{ci} & \text{质心线加速度}\end{cases}$

  计算每个杆怎么动.

- 向内迭代：末端 → 基座 $\begin{cases}f_i & \text{杆受到的力} \\ n_i & \text{杆受到的力矩} \\ \tau_i & \text{电机需要输出的力矩}\end{cases}$

知道每根杆如何运动后，回推想这么动要输出多大的力矩.

1. 向外迭代：

$$^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i + \dot\theta_{i+1}\,{}^{i+1}\hat Z_{i+1}$$

$$^{i+1}\dot\omega_{i+1} = \underbrace{{}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot\omega_i}_{\text{上一个带来的}} + \underbrace{{}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i\times\dot\theta_{i+1}\,{}^{i+1}\hat Z_{i+1}}_{\text{方向变化导致的(叉乘引起)}} + \underbrace{\ddot\theta_{i+1}\,{}^{i+1}\hat Z_{i+1}}_{\text{自己本身的}}$$

$$^{i+1}\dot v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\left(\underbrace{{}^{i}\dot v_i}_{\text{上一个关节}} + \underbrace{{}^{i}\dot\omega_i\times{}^{i}P_{i+1}}_{\text{切向}} + \underbrace{{}^{i}\omega_i\times({}^{i}\omega_i\times{}^{i}P_{i+1})}_{\text{向心}}\right)$$

如果是移动关节：$+\underbrace{2\,{}^{i+1}\omega_{i+1}\times\dot d_{i+1}\,{}^{i+1}\hat Z_{i+1}}_{\text{科氏}} + \underbrace{\ddot d_{i+1}\,{}^{i+1}\hat Z_{i+1}}_{\text{本身的线加速度}}$

$$^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i$$

$${}^i\dot{v}_{ci} = \underbrace{{}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{ci}}_{切向} + \underbrace{{}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{ci})}_{向心} + \underbrace{{}^i\dot{v}_i}_{原点}$$

- 如果考虑重力 ${}^0\dot{v}_0 = G$.

2. 内推 i的力矩受到后面的影响，所以要向内迭代.

① $${}^if_i = {}^i_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1} + {}^iF_i$$ (力平移了) 不要用看作用点.

${}^if_i$：连杆 i-1 作用在关节 i 上的力.

F_i：惯性需要的力.

② $${}^in_i = {}^iN_i + {}^iR_{i+1}\,{}^{i+1}n_{i+1} + {}^iP_{ci} \times {}^iF_i + \cancel{{}^iP_{ci} \times {}^iF_i} + {}^iP_{i+1} \times {}^i_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1}$$

${}^iN_i$：杆转动带来的，用欧拉方程 $I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega)$

${}^iP_{ci} \times {}^iF_i$：惯性力对质心，产生的力矩，平动.

${}^iR_{i+1}\,{}^{i+1}n_{i+1}$：下一级传回来的.

${}^iP_{i+1} \times {}^iR_{i+1}\,{}^{i+1}f_{i+1}$：下一级有受力传回来的

③ $\tau_i = {}^in_i^T \cdot \hat{z}_i$ 把力矩投影到关节的轴方向上